Universidade Federal de Lavras

Departamento de Ciências Exatas

Prof. Daniel Furtado Ferreira

$7^{\underline{a}}$ Lista Prática — Distribuição de Probabilidade Normal

1) Calcule a partir da distribuição normal padronizada, as seguintes probabilidades:

   a) $P(Z > 1{,}15)$;

   b) $P(Z > 1{,}96)$;

   c) $P(Z < -1{,}96)$;

   d) $P(Z \geq -0{,}15)$;

   e) $P(1{,}10 < Z \leq 1{,}96)$;

   f) $P(-1{,}96 < Z \leq 1{,}96)$;

2) Encontre os valores de Z_c, sendo $Z \sim N(0,\, 1)$, tais que:

   a) $P(Z > Z_c) = 0{,}975$;

   b) $P(Z > Z_c) = 0{,}025$;

   c) $P(Z < Z_c) = 0{,}975$;

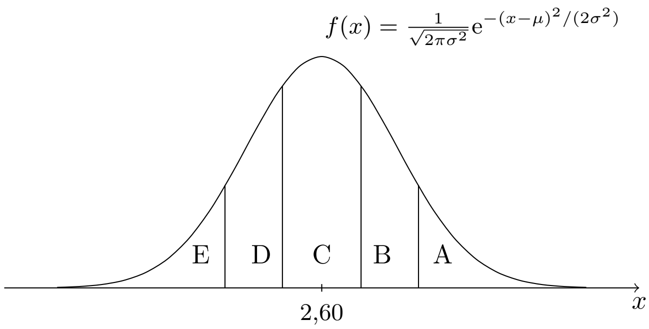
   d) $P(-1{,}80 < Z \leq Z_c) = 0{,}7620$;

   e) $P(0{,}20 < Z \leq Z_c) = 0{,}1230$.

3) Considerando que os pesos de coelhos Norfolk (X) ao abate aos 90 dias possui média $\mu = 2{,}60$ kg e variância $\sigma^2 = 0{,}04$ kg^2. Assumindo que os pesos seguem uma distribuição normal, calcule as seguintes probabilidades:

   a) $P(X > 2{,}80)$ b) $P(X < 2{,}30)$ c) $P(2{,}50 < X < 2{,}60)$

   d) Determine os limites das classes de peso, considerando os seguintes critérios: E: os 10% mais leves; D: os 20% mais pesados imediatamente acima da classe mais leve; C: os 40% que são imediatamente mais pesados acima dessa classe; B: os 20% imediatamente mais pesados que os da classe C; e A: os 10% mais pesados de todos. Observe a figura a seguir:



4) Suponha que X (V.A. discreta) represente o número de animais doentes de uma determinada raça. Sabe-se que esta doença é controlada geneticamente e que ataca 1/4 da raça. Numa amostra de $n = 50$ animais, utilizando a distribuição binomial (exata) e a aproximação normal, determinar:

   a) A probabilidade de haver na amostra menos de 10 animais doentes?

   b) A probabilidade de haver no máximo 6 animais doentes?

5) Numa lâmina verificou-se que existiam em média 8 bactérias/cm^2. A lâmina foi subdividida em 300 quadrados de 1 cm^2. Em quantos destes quadrados você espera encontrar no máximo 3 bactéria? Qual é a probabilidade de se encontrar mais de 6 bactérias por centímetro quadrado? Usar a aproximação normal e comparar os resultados com os valores exatos das probabilidades obtidas pela distribuição Poisson.

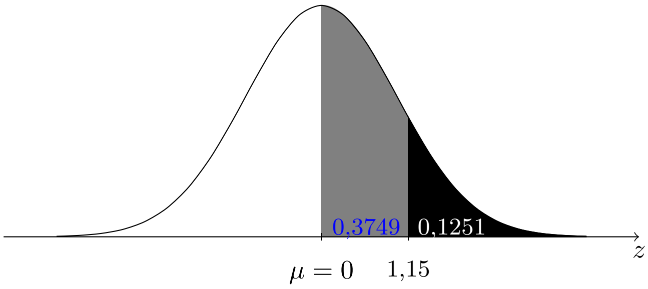
Tabela: Probabilidades α da distribuição normal padrão $N(0,1)$, para valores do quantil Z_t padronizado, de acordo com a seguinte afirmativa probabilística: $P(0 < Z < Z_t) = \alpha$.

Z_t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2704	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	0,4951	0,4952
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2,8	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,4979	0,4980	0,4981
2,9	0,4981	0,4982	0,4982	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986	0,4986
3,0	0,4987	0,4987	0,4987	0,4988	0,4988	0,4989	0,4989	0,4989	0,4990	0,4990
3,1	0,4990	0,4991	0,4991	0,4991	0,4992	0,4992	0,4992	0,4992	0,4993	0,4993
3,2	0,4993	0,4993	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4995	0,4995	0,4995
3,3	0,4995	0,4995	0,4995	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4997
3,4	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4998
3,5	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998
3,6	0,4998	0,4998	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,7	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,8	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,9	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000

Resolução

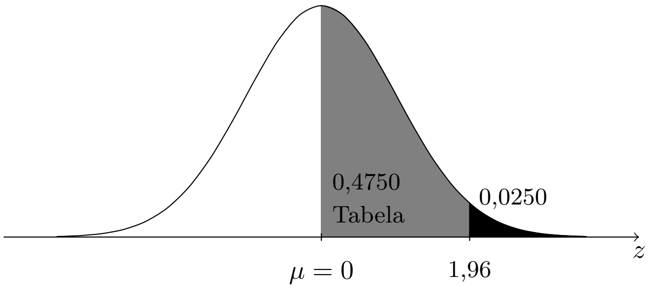
1) As probabilidades da normal padrão podem ser obtidas diretamente da tabela ou com algumas simples operações elementares dos valores obtidos diretamente na tabela. Nas figuras que seguem o valor da probabilidade almejada estará hachurado em preto e o valor tabelado em cinza, quando for possível fazer isso.

   a) A probabilidade $P(Z > 1{,}15)$ está ilustrada na figura a seguir, com a cor preta. Na cor cinza está a área que a tabela fornece:

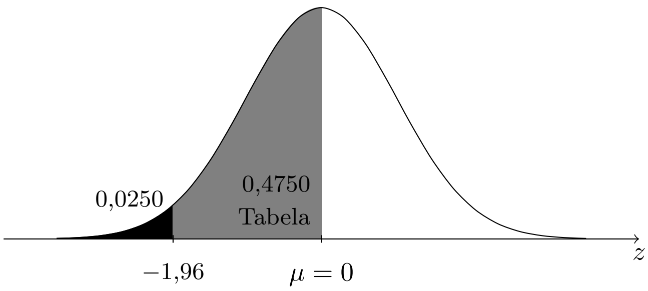


   Logo, $P(Z > 1{,}15) = 0{,}5 - P(0 < Z < 1{,}15) = 0{,}5 - 0{,}3749 = 0{,}1251 = 12{,}51\%$.

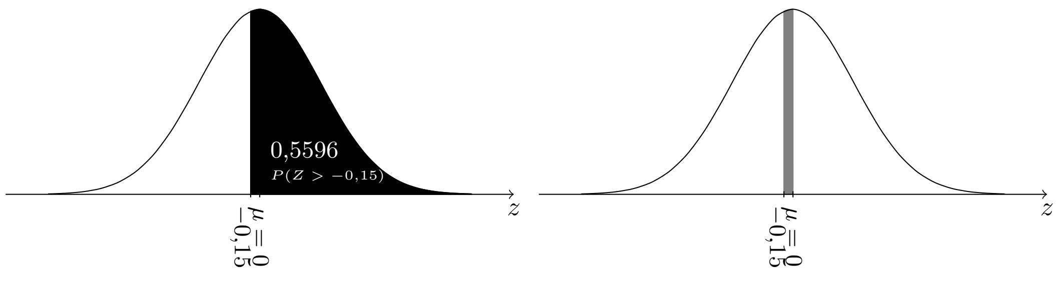
   b) $P(Z > 1{,}96) = 0{,}5 - P(0 < Z < 1{,}96) = 0{,}5 - 0{,}4750 = 0{,}0250 = 2{,}50\%$, veja o gráfico a seguir.



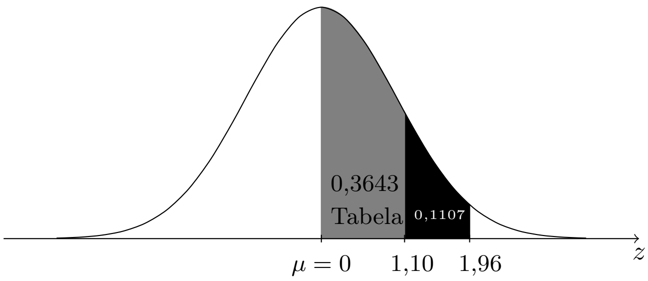
   c) $P(Z < -1{,}96) = 0{,}5 - P(-1{,}96 < Z < 0) = 0{,}5 - P(0 < Z < 1{,}96) = 0{,}5 - 0{,}4750 = 0{,}0250 = 2{,}50\%$, veja o gráfico a seguir. A igualdade $P(-1{,}96 < Z < 0) = P(0 < Z < 1{,}96)$ é verdadeira por causa da simetria da distribuição normal.



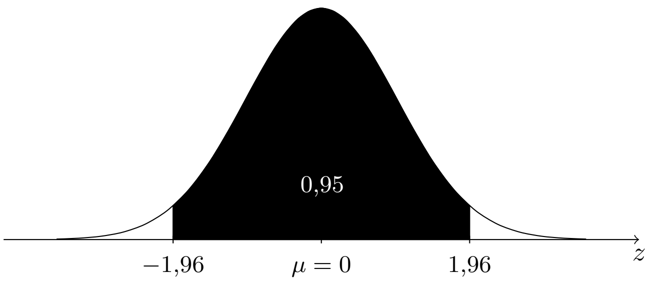
   d) $P(Z > -0{,}15) = 0{,}5 + P(-0{,}15 < Z < 0) = 0{,}5 + P(0 < Z < 0{,}15) = 0{,}5 + 0{,}0596 = 0{,}5596 = 55{,}96\%$, veja o gráfico a seguir. Neste caso, a consulta da tabela (0,0596) é destacada na figura da direita em cinza.



   e) $P(1{,}10 < Z \leq 1{,}96) = P(0 < Z < 1{,}96) - P(0 < Z < 1{,}10) = 0{,}4750 - 0{,}3643 = 0{,}1107 = 11{,}07\%$, veja o gráfico a seguir.

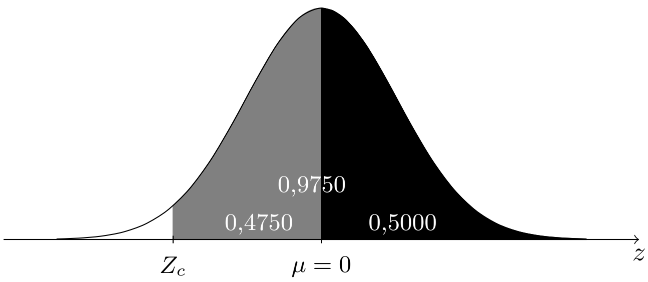


f) $P(-1{,}96 < Z \leq 1{,}96) = 2 \times P(0 < Z \leq 1{,}96) = 2 \times 0{,}4750 = 0{,}95 = 95\%$, veja o gráfico a seguir.

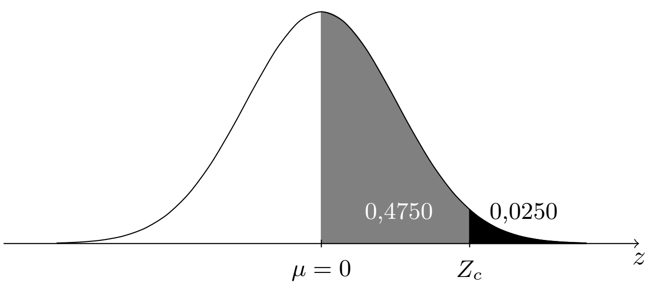


2) Para resolver este exercício precisamos sempre encontrar área entre 0 e o ponto Z_c, pois a tabela que vamos consultar refere-se a probabilidades do seguinte evento: $P(0 < Z < Z_c)$. Lembre-se que no interior da tabela estão estas áreas (probabilidades) sob a curva e o valor de Z está na primeira coluna da tabela, com a segunda decimal na primeira linha.

a) Se $P(Z > Z_c) = 0{,}9750$, logo $P(Z_c < Z < 0) = 0{,}9750 - 0{,}50 = 0{,}4750$. Consultando a tabela normal padrão, localizamos o valor 0,4750 em seu interior e verificamos que ele corresponde ao valor $Z_c = 1{,}96$. Mas como $Z_c < 0$, então $Z_c = -1{,}96$. Veja a figura ilustrativa. A área hachurada, preto e cinza, corresponde ao valor da probabilidade toda; a área em preto a $P(Z > 0) = 0{,}50$ e a área em cinza, a probabilidade $P(Z_c < Z < 0) = 0{,}4750$.

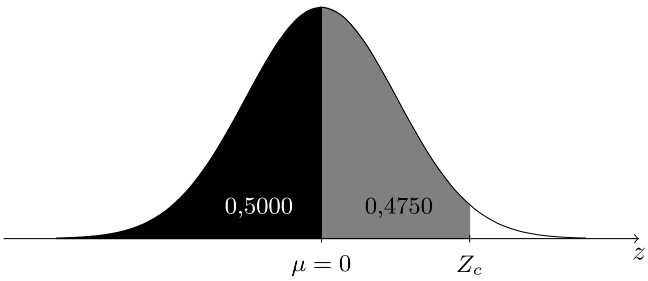


b) Se $P(Z > Z_c) = 0{,}0250$, logo $P(0 < Z < Z_c) = 0{,}50 - 0{,}0250 = 0{,}4750$. Consultando a tabela normal padrão, localizamos o valor 0,4750 em seu interior e verificamos que ele corresponde ao valor $Z_c = 1{,}96$. Veja a figura ilustrativa.A área em preto corresponde a probabilidde solicitada $P(Z > Z_c) = 0{,}0250$ e a área em cinza, a probabilidade $P(0 < Z < Z_c) = 0{,}4750$.

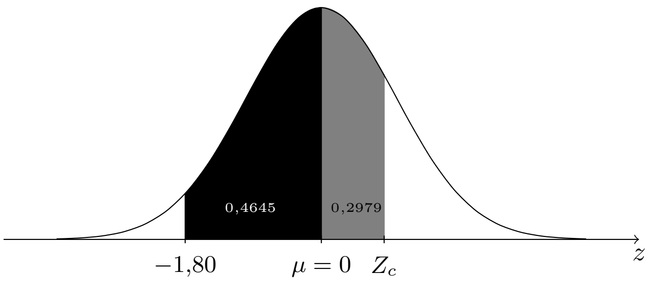


c) Se $P(Z < Z_c) = 0{,}9750$, logo $P(0 < Z < Z_c) = 0{,}9750 - 0{,}50 = 0{,}4750$. Consultando a tabela normal padrão, localizamos o valor 0,4750 em seu interior e verificamos que ele corresponde ao valor $Z_c = 1{,}96$. Veja a figura ilustrativa. A área hachurada corresponde ao valor da probabilidade toda; a área em preto, a probabilidade $P(Z < 0) = 0{,}50$ e a área em cinza, a $P(0 < Z < Z_c) = 0{,}4750$.

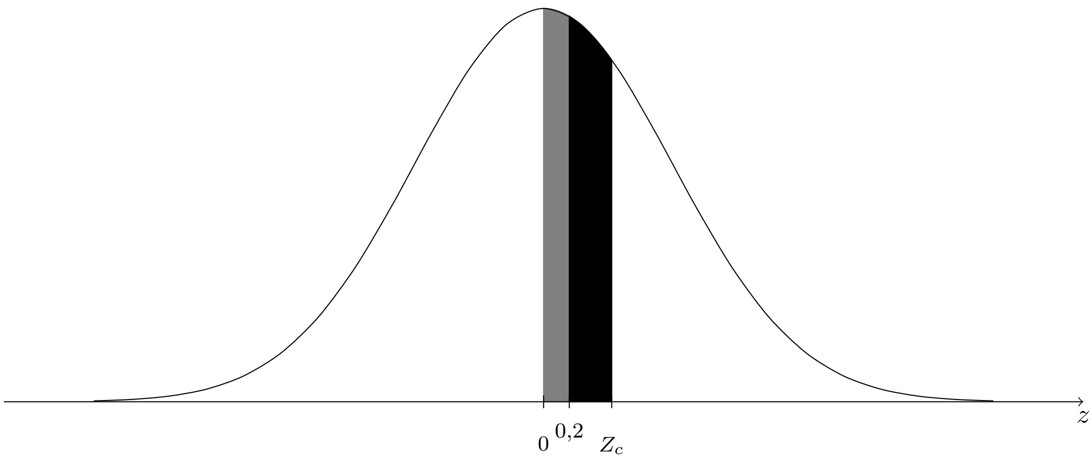
 Ferreira, D.F.



d) $P(-1{,}80 < Z \leq Z_c) = 0{,}7620$,logo $P(-1{,}80 < Z < 0) + P(0 < Z \leq Z_c) = 0{,}4641 + (0{,}7620 - 0{,}4641) = 0{,}4641 + 0{,}2979$.Então, podemos dizer que a área sob a curva entre 0 e Z_c é igual a 0,2979. Assim, $P(0 < Z \leq Z_c) = 0{,}2979$. Este valor de probabilidade corresponde ao valor $Z_c = 0{,}83$, sem interpolar, ou seja, tomando-se o valor mais próximo na tabela. A área colorida de preto corresponde a probabilidade $P(-1{,}80 < Z < 0) = 0{,}4641$ e a área em cinza, a probabilidade $P(0 < Z \leq Z_c) = 0{,}2979$.



e) $P(0{,}20 < Z \leq Z_c) = 0{,}1230$, logo $P(0 < Z \leq Z_c) = P(0 < Z < 0{,}20) + 0{,}1230 = 0{,}0793 + 0{,}1230 = 0{,}2023$. Então, podemos dizer que a área sob a curva entre 0 e Z_c é igual a 0,2023. Este valor de probabilidade corresponde ao valor $Z_c = 0{,}53$, sem realizar interpolação, ou seja, tomando-se o valor mais próximo na tabela. A área colorida de preto corresponde a probabilidade $P(0{,}20 < Z \leq Z_c) = 0{,}1230$ e a área em cinza, a probabilidade $P(0 < Z < 0{,}20) = 0{,}0793$. A soma das áreas preto e cinza corresponde a probabilidade $P(0 < Z \leq Z_c) = 0{,}2023$. Veja figura ilustrativa.

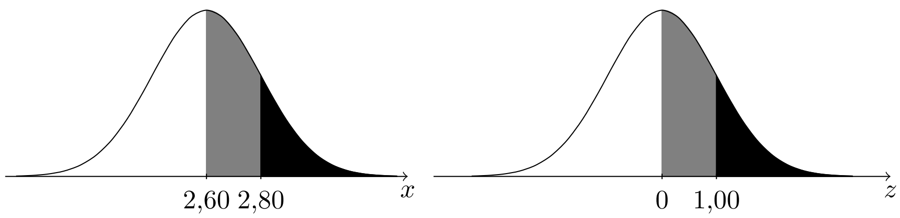


3) Se o peso dos coelhos ao abate $X \sim N(\mu = 2{,}6;\ \sigma^2 = 0{,}04)$, então podemos resolver as questões apresentadas da seguinte forma:

a) Se $P(X > 2{,}80) = P[Z > (2{,}80 - 2{,}60)/0{,}20] = P(Z > 1{,}00)$=0,50-0,3413=15,87%. Existe uma equivalência entre as áreas sob uma curva normal qualquer e as áreas sob a curva normal padrão, cujos limites que delineiam estas regiões são obtidos pela padronização dos limites da variável original que limitam as regiões que determinam as probabilidades desejadas. Neste exemplo, o valor de X de 2,80 que limita a região $X > 2{,}80$ equivale na escala padronizada ao valor de Z de 1,00. A forma geral para padronizarmos um valor X_c de uma variável X é dada por

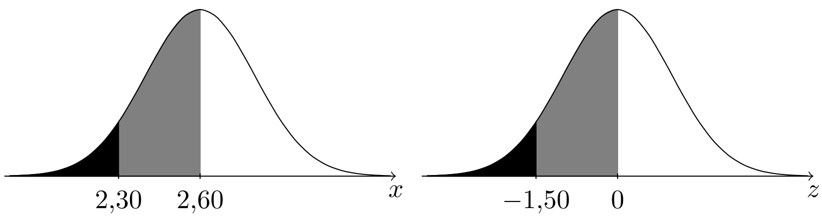
$$Z_c = \frac{X_c - \mu}{\sigma}.$$

Nos dois gráficos a seguir apresentamos a probabilidade (área) sob a normal $N(\mu = 2{,}6;\ \sigma^2 = 0{,}04)$ e a mesma probabilidade na normal padrão $N(\mu = 0;\ \sigma^2 = 1)$. O gráfico da direita é o da normal padrão, em que o valor 1 representa o valor 2,80 na escala padronizada. A área em preto representa a probabilidade almejada e área em cinza, a probabilidade obtida da consulta da tabela da normal padrão (0,3413).



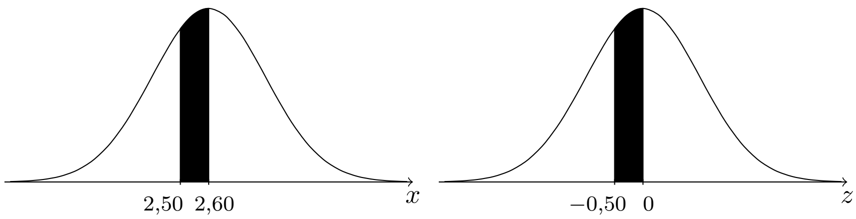
b) Se $P(X < 2{,}30) = P[Z < (2{,}30 - 2{,}60)/0{,}20] = P(Z < -1{,}50)$=0,50-P(0<Z<1,5)=0,50-0,4332=6,68%.

Nos dois gráficos a seguir apresentamos a probabilidade (área) sob a normal $N(\mu = 2{,}6;\ \sigma^2 = 0{,}04)$ e a mesma probabilidade na normal padrão $N(\mu = 0;\ \sigma^2 = 1)$. O gráfico da direita é o da normal padrão, em que o valor $-1{,}50$ representa o valor 2,30 na escala padronizada. A área em preto representa a probabilidade almejada e área em cinza, a probabilidade obtida da consulta da tabela da normal padrão (0,4332).

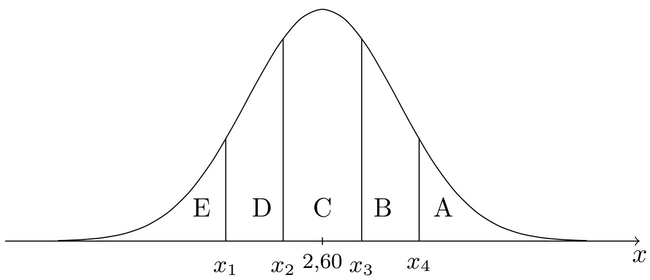


c) Se $P(2{,}50 < X < 2{,}60) = P[(2{,}50 - 2{,}60)/0{,}20 < Z < (2{,}60 - 2{,}60)/0{,}20] = P(-0{,}50 < Z < 0{,}00) = P(0 < Z < 0{,}50) = 19{,}15\%$.

Nos dois gráficos a seguir apresentamos a probabilidade (área) sob a normal $N(\mu = 2{,}6;\ \sigma^2 = 0{,}04)$ e a mesma probabilidade na normal padrão $N(\mu = 0;\ \sigma^2 = 1)$. O gráfico da direita é o da normal padrão, em que os valores padronizados são $-0{,}50$ e 0 e representam os valores 2,50 e 2,60 na escala padronizada.



d) Para acharmos os limites de peso de cada classe vamos considerar, para ilustrar, a situação determinada pelo valor x_1 que delimita a categoria E e que é o limite inferior da categoria D (veja figura a seguir). Neste caso vamos detalhar todos os passos e fazer os gráficos correspondentes. Nos demais limites, não faremos todos os gráficos correspondentes.



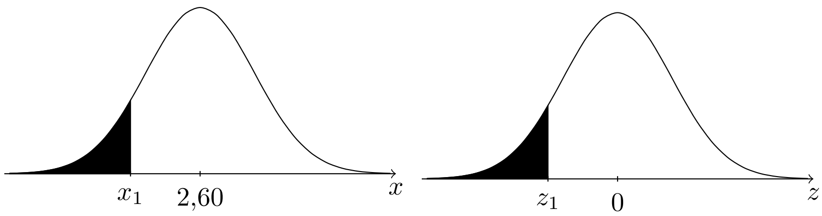
Se $P(X < x_1) = 10\%$ e x_1 pode ser padronizado por

$$z_1 = \frac{x_1 - \mu}{\sigma} = \frac{x_1 - 2{,}60}{0{,}20}.$$

Assim, $P(X < x_1) = P(Z < z_1) = 0{,}10$; logo, $P(z_1 < Z < 0) = 0{,}5 - 0{,}10 = 0{,}40$. Se consultarmos a tabela da normal padrão, sem interpolação, ou seja buscando o valor z_1 cuja área entre z_1 e 0 é aproximadamente 0,40, temos $z_1 = -1{,}28$ (confira na tabela). Assim, como z_1 é o valor padronizado de x_1, podemos obter x_1 substituindo $z_1 = -1{,}28$ na fórmula de padronização anterior e resolvendo para x_1, da seguinte forma

$$-1{,}28 = \frac{x_1 - 2{,}60}{0{,}20} \text{ logo,}$$
$$x_1 = 0{,}20 \times (-1{,}28) + 2{,}60 = 2{,}344 \text{ kg}.$$

Nos dois gráficos a seguir apresentamos a probabilidade (área) sob a normal $N(\mu = 2{,}6;\ \sigma^2 = 0{,}04)$ e a mesma probabilidade na normal padrão $N(\mu = 0;\ \sigma^2 = 1)$, correspondente ao evento $X < x_1$, para os valores de x_1 e z_1, respectivamente. O gráfico da direita é o da normal padrão. Observe que z_1 é negativo.



Para os demais valores, que não vamos ilustrar com os gráficos correspondentes, temos:
Se $P(X < x_2) = 10\% + 20\% = 30\%$, então x_2 pode ser padronizado por

$$z_2 = \frac{x_2 - \mu}{\sigma} = \frac{x_2 - 2{,}60}{0{,}20}.$$

Assim, $P(X < x_2) = P(Z < z_2) = 0{,}30$; logo, $P(z_2 < Z < 0) = 0{,}5 - 0{,}30 = 0{,}20$. Se consultarmos a tabela da normal padrão, sem interpolação, ou seja, buscando o valor z_2 cuja área entre z_2 e 0 é aproximadamente 0,20, temos $z_2 = -0{,}52$ (confira na tabela). Assim, como z_2 é o valor padronizado de x_2, podemos obter x_2 substituindo $z_2 = -0{,}52$ na fórmula da despadronização $x_2 = \sigma z_2 + \mu$ da seguinte forma

$$x_2 = 0{,}20 \times (-0{,}52) + 2{,}60 = 2{,}496 \text{ kg}.$$

Para o limite x_3, temos que $P(X < x_3) = P(Z < z_3) = 0{,}70$; logo, $P(0 < Z < z_3) = 0{,}7 - 0{,}5 = 0{,}20$. Se consultarmos a tabela da normal padrão, sem interpolação, ou seja, buscando o valor z_3 cuja área entre 0 e z_3 é aproximadamente 0,20, temos $z_3 = 0{,}52$ (confira na tabela). Assim, como z_3 é o valor padronizado de x_3, podemos obter x_3 substituindo $z_3 = 0{,}52$ na fórmula da despadronização $x_3 = \sigma z_3 + \mu$ da seguinte forma

$$x_3 = 0{,}20 \times 0{,}52 + 2{,}60 = 2{,}704 \text{ kg}.$$

Finalmente para o limite x_4 temos que $P(X < x_4) = P(Z < z_4) = 0{,}90$; logo, $P(0 < Z < z_4) = 0{,}9 - 0{,}5 = 0{,}40$. Se consultarmos a tabela da normal padrão, sem interpolação, ou seja, buscando o valor z_4 cuja área entre 0 e z_4 é aproximadamente 0,40, temos $z_4 = 1{,}28$ (confira na tabela). Assim, como z_4 é o valor padronizado de x_4, podemos obter x_4 substituindo $z_4 = 1{,}28$ na fórmula da despadronização $x_4 = \sigma z_4 + \mu$ da seguinte forma

$$x_4 = 0{,}20 \times 1{,}28 + 2{,}60 = 2{,}856 \text{ kg}.$$

Portanto devemos classificar os coelhos na categoria E se o seu peso ao abate for inferior a 2,344 kg, na categoria D se seu peso estiver entre 2,344 kg e 2,496 kg, na categoria C se o seu peso estiver entre 2,496 kg e 2,704 kg, na categoria B se o seu peso estiver entre 2,704 kg e 2,856 kg e na categoria A se seu peso for superior a 2,856 kg.

4) A variável X referente ao número de animais doentes possui distribuição binomial com probabilidade do sucesso $p = 1/4$ e $n = 50$. Assim, $X \sim \text{Binomial}(p = 1/4; n = 50)$. Logo, as probabilidades almejadas são:

   a) Se utilizarmos a distribuição binomial exata a probabilidade almejada é:

$$\begin{aligned}
P(X < 10) =& P(X = 9) + P(X = 8) + \cdots + P(X = 0)\\
=& \binom{50}{9}\left(\frac{1}{4}\right)^9\left(\frac{3}{4}\right)^{50-9} + \binom{50}{8}\left(\frac{1}{4}\right)^8\left(\frac{3}{4}\right)^{50-8} + \cdots + \binom{50}{0}\left(\frac{1}{4}\right)^0\left(\frac{3}{4}\right)^{50-0}\\
=& 0{,}072086641 + 0{,}046341412 + 0{,}025864974 + 0{,}012344646 + 0{,}004937858+\\
&+ 0{,}001610171 + 0{,}000411107 + 0{,}000077082 + 0{,}000009438 + 0{,}000000566\\
=& 0{,}1637
\end{aligned}$$

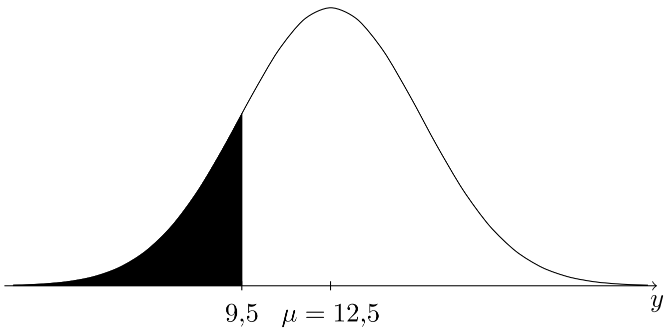
Considerando agora a aproximação normal e denominando a variável número de animais doentes na escala contínua por Y, temos

$$P(X < 10) \cong P(Y < 9{,}5),$$

devido a correção de continuidade, pois devemos somar as áreas dos retângulos correspondentes aos valores 9, 8, $\cdots$, 0, cujo limite da região é o 9,5, limite superior do retângulo do valor 9. Para determinarmos esta probabilidade devemos estimar a média e variância da binomial que são:

$$\mu_Y = np = 50 \times \frac{1}{4} = 12{,}5 \qquad \text{e} \qquad \sigma_Y^2 = np(1-p) = 50 \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = 9{,}375.$$

O gráfico da probabilidade almejada na escala não padronizada é:



Portanto,

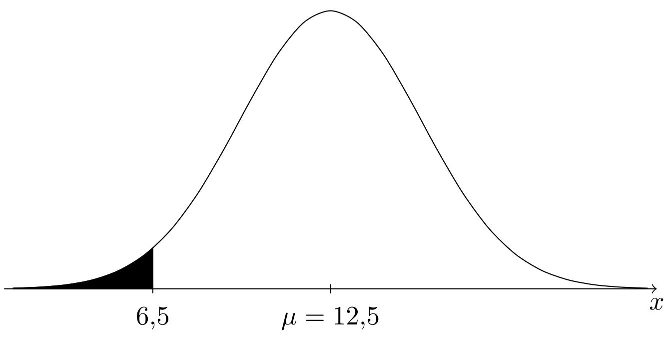
$$\begin{aligned}
P(X < 10) \cong & P(Y < 9{,}5) = P\left(Z < \frac{9{,}5 - 12{,}5}{\sqrt{9{,}375}}\right) = P(Z < -0{,}98) \\
\cong & 0{,}5 - P(-0{,}98 < Z < 0) = 0{,}5 - P(0 < Z < 0{,}98) = 0{,}5 - 0{,}3365 = 16{,}35\%.
\end{aligned}$$

Comparando a probabilidade exata 16,37% com o resultado da aproximação normal 16,35%, verificamos que tivemos um excelente resultado aproximado. Isso é esperado, pois $np = 12{,}5 > 5$.

b) Utilizando inicialmente o cálculo exato pela binomial, temos

$$\begin{aligned}
P(X \le 6) = & P(X = 6) + P(X = 5) + \cdots + P(X = 0) \\
= & \binom{50}{6}\left(\frac{1}{4}\right)^6\left(\frac{3}{4}\right)^{50-6} + \binom{50}{5}\left(\frac{1}{4}\right)^5\left(\frac{3}{4}\right)^{50-5} + \cdots + \binom{50}{0}\left(\frac{1}{4}\right)^0\left(\frac{3}{4}\right)^{50-0} \\
= & 0{,}012344646 + 0{,}004937858 + 0{,}001610171 + 0{,}000411107 + 0{,}000077082 + \\
& + 0{,}000009438 + 0{,}000000566 \\
= & 0{,}01939 = 1{,}939\%
\end{aligned}$$

Pela aproximação normal, temos que $P(X \le 6) \cong P(Y < 6{,}5)$, como pode ser visto na figura ilustrativa a seguir.



Portanto,

$$\begin{aligned}
P(X \le 6) \cong & P(Y < 6{,}5) = P\left(Z < \frac{6{,}5 - 12{,}5}{\sqrt{9{,}375}}\right) = P(Z < -1{,}96) \\
\cong & 0{,}5 - P(-1{,}96 < Z < 0) = 0{,}5 - P(0 < Z < 1{,}96) = 0{,}5 - 0{,}4750 = 2{,}50\%.
\end{aligned}$$

Comparando a probabilidade exata 1,94% com o resultado da aproximação normal 2,50%, verificamos que tivemos uma concordância apenas razoável. Embora a aproximação seja boa teoricamente, pois $np = 12{,}5 > 5$, quando calculamos probabilidades relacionadas aos valores extremos da distribuição, há sempre uma perda da precisão da aproximação normal.

5) A variável X referente ao número de bactérias por cm^2 possui distribuição Poisson com parâmetro $\lambda = 8$ (média). Assim, $X \sim$ Poisson($\lambda = 8$). Logo, as respostas as questões formuladas são dadas por:

a) Se utilizarmos a Poisson exata a probabilidade necessária para respondermos a primeira questão é:

$$\begin{aligned}P(X \leq 3) =& P(X = 3) + P(X = 2) + P(X = 1) + P(X = 0)\\ =& \frac{e^{-8}8^3}{3!} + \frac{e^{-8}8^2}{2!} + \frac{e^{-8}8^1}{1!} + \frac{e^{-8}8^0}{0!}\\ =& 0{,}0286 + 0{,}0107 + 0{,}0027 + 0{,}0003\\ =& 0{,}0423 = 4{,}23\%\end{aligned}$$

O número esperado de quadrados com no máximo 3 bactérias é $0{,}0423 \times 300 \cong 13$.

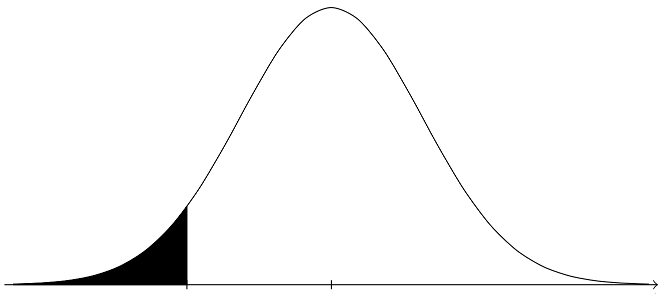
Considerando agora a aproximação normal e denominando a variável número de bactérias na escala contínua por Y, temos

$$P(X \leq 3) \cong P(Y < 3{,}5),$$

devido a correção de continuidade, pois devemos somar as áreas dos retângulos correspondentes aos valores 3, 2, 1, 0, cujo limite da região é o 3,5, limite superior do retângulo do valor 3. Para determinarmos esta probabilidade devemos estimar a média e variância da Poisson que são iguais e no caso valem $\lambda = 8$. Logo

$$\mu_Y = 8 \qquad \text{e} \qquad \sigma^2_Y = 8.$$

O gráfico da probabilidade almejada na escala não padronizada é:



Portanto,

$$\begin{aligned}P(X \leq 3) \cong& P(Y < 3{,}5) = P\left(Z < \frac{3{,}5 - 8}{\sqrt{8}}\right) = P(Z < -1{,}59)\\ \cong& 0{,}5 - P(-1{,}59 < Z < 0) = 0{,}5 - P(0 < Z < 1{,}59) = 0{,}5 - 0{,}4441 = 5{,}59\%.\end{aligned}$$

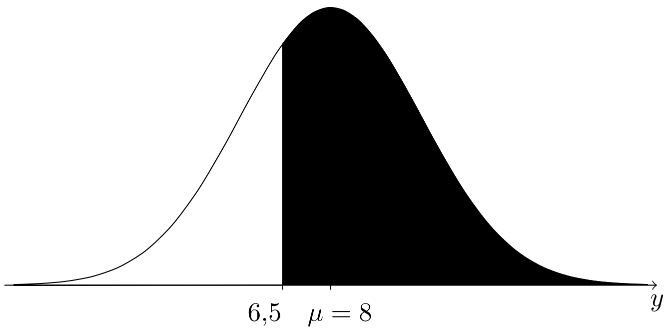
Comparando a probabilidade exata 4,23% com o resultado da aproximação normal 5,59%, verificamos que tivemos uma boa concordância. Isso é esperado, pois $\lambda = 8 > 7$, que é o limite recomendado em alguns livros textos.

O número esperado de quadrados com no máximo 3 bactérias é $0{,}0559 \times 300 \cong 17$.

b) Utilizando inicialmente o cálculo exato pela Poisson, temos

$$\begin{aligned}P(X > 6) =& 1 - P(X \leq 6) = 1 - [P(X = 6) + P(X = 5) + \cdots + P(X = 0)]\\ =& 1 - \left[\frac{e^{-8}8^6}{6!} + \frac{e^{-8}8^5}{5!} + \cdots + \frac{e^{-8}8^1}{1!} + \frac{e^{-8}8^0}{0!}\right]\\ =& 1 - (0{,}1221382 + 0{,}0916037 + 0{,}0916037 + 0{,}0572523 + 0{,}0286261 + 0{,}0107348\\ &+ 0{,}0026837 + 0{,}0003355)\\ =& 1 - 0{,}3133743 = 68{,}66\%\end{aligned}$$

Pela aproximação normal, temos que $P(X > 6) \cong P(Y > 6{,}5)$, como pode ser visto na figura ilustrativa a seguir:



Portanto,

$$\begin{aligned} P(X > 6) \cong & P(Y > 6{,}5) = P\left(Z > \frac{6{,}5 - 8}{\sqrt{8}}\right) = P(Z > -0{,}53) \\ \cong & 0{,}5 + P(-0{,}53 < Z < 0) = 0{,}5 + P(0 < Z < 0{,}53) = 0{,}5 + 0{,}2019 = 70{,}19\%. \end{aligned}$$

Comparando a probabilidade exata 68,66% com o resultado da aproximação normal 70,19%, verificamos que tivemos um bom resultado da aproximação.